

## 159-I

### B.A./B.Sc./B.Ed. (Part-I) EXAMINATION, 2019

(Common for the Faculties of Arts and Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-I]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

## MATHEMATICS - I

(Discrete Mathematics)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 40 for Science  
: 53 for Arts

Attempt Five questions in all, selecting one question from each unit.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Write your roll number on question paper before start writing answer of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

### UNIT-I/इकाई-I

1.

- (a) Prove that the inverse relation of an equivalence relation on a non-empty set  $A$  is also an equivalence relation on  $A$ . 4, 5½

सिद्ध कीजिए कि अस्विकृत समुच्चय  $A$  पर किसी तुल्यता सम्बन्ध का प्रतिलोम सम्बन्ध भी  $A$  पर एक तुल्यता सम्बन्ध होता है।

- (b) In a group 30 cricket players, 20 are good batsmen, 8 are good bowlers, 25 are good fielders, 20 possess at least two of the above qualities and 6 have all the three qualities. Then find how many have none of these qualities? 4, 5½

30 क्रिकेट खिलाड़ियों के समूह में, 20 अच्छे बल्लेबाज़ 8 अच्छे गेंदबाज़, 25 अच्छे क्षेत्ररक्षक, 20 कम से कम दो विशेषता रखते हैं एवं 6 के पास तीनों विशेषताएँ हैं। तो ज्ञात कीजिए कि इनमें से कितने खिलाड़ियों के पास इनमें से कोई विशेषता नहीं है।

2.

- (a) Let  $f: S \rightarrow T$ ,  $g: T \rightarrow U$  and  $h: U \rightarrow V$ ;

and each of functions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  is one-one as well as onto function; then show that

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

यदि  $f: S \rightarrow T$ ,  $g: T \rightarrow U$  एवं  $h: U \rightarrow V$ ;

तथा प्रत्येक फलन  $f$ ,  $g$ ,  $h$  ऐकेकी और आच्छादक है तो दर्शाओ कि  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

- (b) 45 Candidates appear in a competitive examination. Show that there are at least 2 candidates whose roll numbers differ by a multiple of 44. 4, 5½  
 किसी प्रतिस्पर्धा परीक्षा में 45 प्रतियोगी उपस्थित होते हैं। दर्शाओ कि उनमें से, कम से कम दो प्रतियोगियों के अनुक्रमांकों का अन्तर 44 का गुणांक होगा।

### UNIT-II /इकाई-II

3.

- (a) Let  $\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$  be a Boolean algebra. Then  $(B, \leq)$  [Where  $x \leq y$  if and only if  $x \cdot y' = 0; x, y \in B$ ] is a distributive complemented lattice. 4, 5½

माना  $\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$  एक बूलीय बीजगणित है, तब  $(B, \leq)$  [जहाँ  $x \leq y$  यदि और केवल यदि  $x \cdot y' = 0; x, y \in B$ ] एक बंटनात्मक पूरित जालक है।

- (b) Prove that the linear congruence  $ax \equiv b \pmod{m}$ , where  $a$  is not congruent to  $0 \pmod{m}$  has a solution if and only if  $(a, m)$  divides  $b$ . 4, 5½

सिद्ध कीजिए कि रेखीय समशेषता  $ax \equiv b \pmod{m}$ , जहाँ  $a, a \not\equiv 0 \pmod{m}$  को समशेष नहीं है, का एक हल है, यदि और केवल यदि  $(a, m), b$  को विभाजित कीजिए।

4.

- (a) Define Euler's function  $\varphi(m)$ , and prove  $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ , where  $p$  is a prime number and  $k$  is an arbitrary positive integer. 4, 5½

आयलर फलन  $\varphi(m)$  को परिभाषित करते हुए सिद्ध कीजिए  $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ , जिसमें  $p$  एक अभाज्य संख्या है एवं  $k$  एक स्वेच्छ धनात्मक पूर्णांक है।

- (b) For a positive integer  $m$ , define primitive root, also give numerical example to clear the definition. 4, 5½

किसी धनात्मक पूर्णांक  $m$  के लिये अभाज्य मूल को परिभाषित कीजिए एवं परिभाषा के स्पष्टीकरण के लिए संख्यात्मक उदाहरण भी दीजिए।

### UNIT-III /इकाई-III

5.

- (a) Show that the compound statement  $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$  is a contradiction. 4, 5½

प्रदर्शित कीजिए की मिश्र प्रकथन  $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$  एक विरोधाभास है।

- (b) Test the validity of the following argument from :

$p \rightarrow q \vee \sim r$  } premises  
 $q \rightarrow p \wedge r$  }

$\therefore p \rightarrow r$  } conclusion. 4, 5½

निम्नलिखित वाद-विवाद की वैधता का परीक्षण कीजिए :

$p \rightarrow q \vee \sim r$  } पूर्व पक्ष  
 $q \rightarrow p \wedge r$  }

$\therefore p \rightarrow r$  } निष्कर्ष

6.

- (a) A sequence  $b_0, b_1, b_2, \dots$  satisfies the recurrence relation  $b_k = 4b_{k-1} - 4b_{k-2}$  for all integers  $k \geq 2$  with initial conditions  $b_0 = 1$  and  $b_1 = 3$ , then find an explicit formula for the sequence. 4, 5½

सभी पूर्णाकों  $k \geq 2$  के लिए अनुक्रम  $b_0, b_1, b_2, \dots$  पुनरावृत्ति सम्बन्ध  $b_k = 4b_{k-1} - 4b_{k-2}$  को सन्तुष्ट करता है जबकि प्रारम्भिक प्रतिबन्ध  $b_0 = 1$  एवं  $b_1 = 3$ , हैं, तो अनुक्रम के लिए स्पष्ट सूत्र ज्ञात कीजिए।

- (b) Solve the recurrence relation  $u_n + 3u_{n-1} = 10u_{n-2}$ ,  $n \geq 2$  while  $u_0 = 1, u_1 = 4$  by find the generating function. 4, 5½

पुनरावृत्ति सम्बन्ध  $u_n + 3u_{n-1} = 10u_{n-2}$ ,  $n \geq 2$  जबकि  $u_0 = 1, u_1 = 4$  है, को जनक फलन प्राप्त करते हुए हल कीजिए।

### UNIT-IV/इकाई-IV

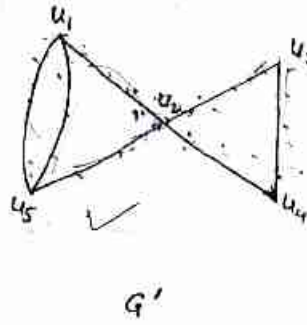
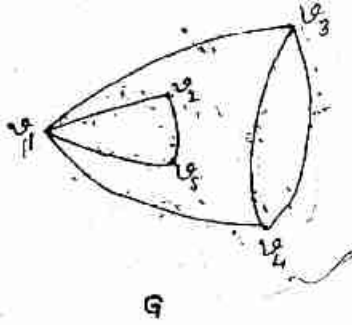
7.

- (a) Prove that in any undirected graph there are even number of vertices of odd degree. 4, 5

सिद्ध कीजिए कि किसी अदिष्ट ग्राफ में विषम कोटि के शीर्षों की संख्या एक सम पूर्णांक होती है।

- (b) Determine whether the graphs  $G$  and  $G'$  are isomorphic. 4, 5

निम्न ग्राफों  $G$  एवं  $G'$  की तुल्य कारिता का परीक्षण कीजिए :



8.

- (a) Show that the number of edges in a simple graph with  $n$  vertices and  $k$  ( $k \geq 1$ ) connected components cannot exceed  $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ . 4,5

दर्शाओं, एक सरल ग्राफ जिसके  $n$  शीर्ष एवं  $k$  ( $k \geq 1$ ) संबद्ध घटक हैं, में कोरों की संख्या  $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$  से अधिक नहीं हो सकती।

- (b) Show that a graph is planar if and only if, it has no subgraph homeomorphic to  $K_5$  or  $K_{3,3}$ . 4,5

कोई ग्राफ समतलीय होता है यदि एवं केवल यदि उसका कोई उपग्राफ  $K_5$  या  $K_{3,3}$  के समरूपी नहीं है।

### UNIT-V/इकाई-V

9.

- (a) Prove that if an  $m$ -ary tree of height  $h$  has  $\ell$  leaves, then  $h \geq \lceil \log_m \ell \rceil$ . If  $m$ -ary tree is full and balanced, then  $h = \lceil \log_m \ell \rceil$ , where  $\lceil x \rceil$  is the ceiling function. 4, 5

सिद्ध कीजिए कि यदि किसी  $m$ -खण्डी वृक्ष की ऊँचाई  $h$  है एवं उसमें  $\ell$  पत्तियाँ हैं तो  $h \geq \lceil \log_m \ell \rceil$ ; एवं यदि  $m$ -खण्डी वृक्ष पूर्ण एवं संतुलित है तो  $h = \lceil \log_m \ell \rceil$ , जहाँ  $\lceil x \rceil$  सीमान्त (अन्तश्छद) फलन है।

(b) Show if  $h$  is the height of a complete binary tree of  $n$  vertices, then  $h = \log_2 \frac{n+1}{2}$  4, 5

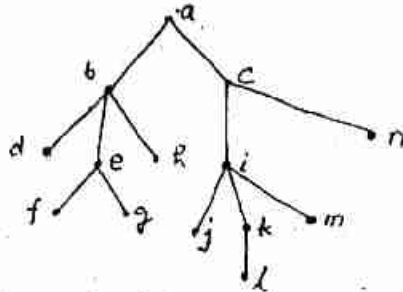
दर्शाओं, यदि  $n$  शीर्षों के सन्तुलित पूर्ण द्विखण्डी वृक्ष की ऊँचाई  $h$  है तो  $h = \log_2 \frac{n+1}{2}$

10.

(a) Find the pre-order transversal of the following tree :

4, 5

निम्न चित्र में दर्शाए वृक्ष का प्रागक्रम चक्रमण ज्ञात कीजिए :



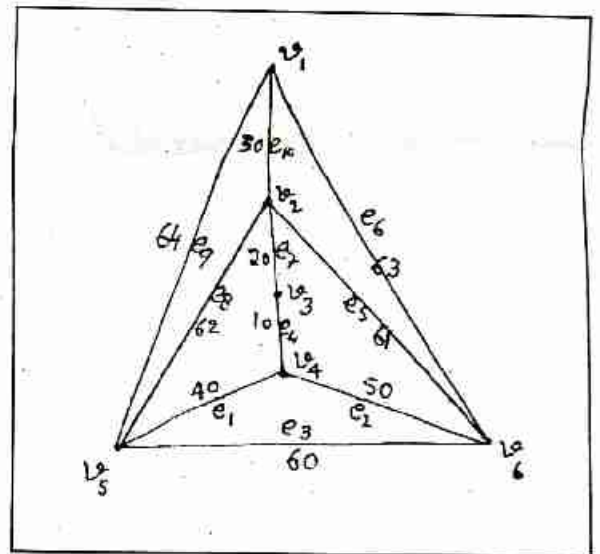
(b) Prepare the minimum spanning tree for the following weighted graph by Kreeskal's method : 4, 5

निम्न दर्शित भरित ग्राफ का न्यूनतम जनक वृक्ष कृष्कल विधि द्वारा तैयार कीजिए :

Edges and their Weights

(कोरें) एवं उनके भार

$e_1$	40	}
$e_2$	50	
$e_3$	60	}
$e_4$	10	
$e_5$	61	}
$e_6$	63	
$e_7$	20	
$e_8$	62	
$e_9$	64	
$e_{10}$	30	



\*\*\*\*\*